BAB III

FUNGSI YOUNG DAN KOMPLEMEN YOUNG

Pada bab ini, dibahas tentang definisi fungsi Young dengan domain real diperluas dan komplemennya.

Sebelumnya, dalam studi deret Fourier, W. H. Young telah menganalisis fungsi konvek $\theta : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ yang bersifat $\theta(-x) = \theta(x), \theta(0) = 0$, dan $\lim_{x\to\infty} \theta(x) = \infty$, dimana setiap fungsi θ dapat diasosiasikan dengan fungsi konvek lain $\psi : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ yang memiliki sifat yang sama dengan θ, yang mana

$$\psi(y) \coloneqq \sup_{x\geq 0}\{x|y| - \theta(x)\}.$$

Oleh sebab itu θ dinamakan *fungsi Young*, dan ψ dinamakan *komplemen Young*.

Pada bab ini, definisi fungsi Young akan dimodifikasi. Fungsi Young akan didefinisikan pada $\overline{\mathbb{R}}$ dengan menambahkan syarat $\theta(\pm\infty) = \infty$ dan $\lim_{x\to c^-} \theta(x) = \theta(c)$ dengan $c = \sup dom(\theta)$.

3.1 Fungsi Young dan Komplemen Young

Berikut merupakan fungsi Young yang dimodifikasi

Definisi 3.1.1

Suatu fungsi $\theta : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ dikatakan *fungsi young* jika memenuhi kondisi:

1. θ konvek pada $\mathbb{R}$
2. $\theta(-x) = \theta(x)$
3. $\theta(0) = 0, \theta(\pm\infty) = \infty$, dan
4. jika $c = \sup dom(\theta) \in \overline{\mathbb{R}}$ maka $\lim_{x\to c^-} \theta(x) = \theta(c)$.

Untuk kasus $:\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}^{+}}$, definisi fungsi Young diatas ekivalen dengan Definisi 1.1 [3].

Remark 1.

a) Sifat $\theta(-x) = \theta(x)$ dan $\theta(0) = 0$ mengindikasikan θ mencapai minimum di 0 dan tak turun pada $[0, \infty)$
b) Untuk sembarang fungsi Young, terdapat $s_0, s_1 > 0$ sedemikian sehingga $\theta(s_0) \in [0, \infty)$ dan $\theta(s_1) \in (0, \infty]$.
c) Berdasarkan b), $c = \sup dom(\theta) > 0$.
d) Fungsi Young kontinu pada interior $dom\theta$. Secara khusus, fungsi Young *finite* merupakan fungsi kontinu pada $\mathbb{R}$.
e) Berdasarkan d), jika $0 \leq d \leq \sup dom(\theta)$ maka $\lim_{x \to d^{-}} \theta(x) = \theta(d)$. Jika $d > \sup dom(\theta)$, maka $\lim_{x \to d^{-}} \theta(x) = \infty = \theta(d)$.
f) Berdasarkan Definisi 3.1.1, $\lim_{x \to \infty} \theta(x) = \infty$.

Untuk setiap fungsi Young θ, dapat dibentuk fungsi $\psi: \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}^{+}}$ yang berasosiasi dengan θ yang didefinisikan

$$\psi(y) \coloneqq \sup_{x \geq 0} \{x|y| - \theta(x)\}.$$

ψ disebut komplemen dari θ dan berlaku ketaksamaan Young

$$\theta(x) + \psi(y) \geq xy.$$

Berdasarkan definisi fungsi ψ, ψ konveks, $\psi(-y) = \psi(y), \psi(0) = 0$, $\psi(\pm\infty) = \infty$, dan $\lim_{y \to \infty} \psi(y) = \infty$.

Misalkan $d = \sup dom(\psi) \in \mathbb{R}$, berdasarkan ketaksamaan Young untuk setiap $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{y \to d^{-}} \psi(y) \geq xd - \theta(x)$$

sehingga

$$\lim_{y \to d^-} \psi(y) \geq \sup_{x \geq 0} \{xd - \theta(x)\} = \psi(d).$$

Tetapi, karena ψ tak turun pada $[0, d]$, maka $\lim_{x \to d^-} \psi(y) \leq \psi(d)$. Akibatnya $\lim_{x \to d^-} \psi(y) = \psi(d)$. Jadi, ψ juga merupakan fungsi Young.

Pada topik analisis konvek, untuk fungsi Young $\theta: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}, \theta$ dapat direpresentasikan sebagai

$$\theta(x) = \sup_{y \geq 0} \{y|x| - \psi(y)\} = \theta'_+(|x|)|x| - \psi\big(\theta'_+(|x|)\big).$$

Contoh 3.1.2

Misalkan $\theta_p(x) := |x|^p, p \geq 1$. θ_p merupakan fungsi Young. Untuk $p = 1$, $\psi(y) = 0$ untuk $|y| \leq 1$ dan $\psi(y) = \infty$ untuk $|y| > 1$ juga merupakan fungsi Young dan komplemen Young dari θ. Hal ini menunjukkan komplemen fungsi Young tidak selalu kontinu pada $\mathbb{R}$.

Contoh 3.1.3

Misalkan $\theta_\infty(x) := \begin{cases} 0, & |x| \leq 1 \\ \infty, & |x| > 1 \end{cases}$. θ_∞ juga merupakan fungsi Young, dimana $\psi(y) = |y|$ untuk setiap $y \in \overline{\mathbb{R}}$.

Proposisi 3.1.4

Misalkan $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ dan fungsi $\theta: (a, b) \to \mathbb{R}$. θ konveks pada (a, b) jika dan hanya jika untuk setiap subinterval tutup $[c, d] \subset (a, b)$,

$$\theta(x) = \theta(c) + \int_c^x \varphi(s)\, ds, \quad c \leq x \leq d, \tag{3.1.5}$$

dimana $\varphi: (a, b) \to \mathbb{R}$, tak turun, dan fungsi kontinu kiri. Juga, φ mempunyai turunan kiri dan kanan di setiap titik pada (a, b) dan bernilai sama kecuali di sejumlah terhitung titik-titik.

Bukti. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang cukup kecil, didefinisikan

$$h_\varepsilon(x) \coloneqq \int_c^x \frac{\theta(s+\varepsilon) - \theta(s)}{\varepsilon}\, ds, \quad x \in [c, d].$$

Karena θ konvek, maka $\underline{D}\theta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\theta(x) - \theta(x-\varepsilon)}{\varepsilon}$. Definisikan $\varphi(s) \coloneqq \underline{D}\theta(s)$. Berdasarkan Teorema kekonvergenan terdominasi Lebesgue

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_c^x \frac{\theta(s+\varepsilon) - \theta(s)}{\varepsilon}\, ds = \int_c^x \varphi(s)\, ds.$$

Dilain pihak, karena θ kontinu, maka

$$\int_c^x \frac{\theta(s+\varepsilon) - \theta(s)}{\varepsilon}\, ds = \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_{c+\varepsilon}^{x+\varepsilon} \theta(s)\, ds - \int_c^x \theta(s)\, ds\right)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_x^{x+\varepsilon} \theta(s)\, ds - \int_c^{c+\varepsilon} \theta(s)\, ds\right)$$

$$\longrightarrow \theta(x) - \theta(c).$$

Sehingga $\theta(x) - \theta(c) = \int_c^x \varphi(s)\, ds$. Karena $\varphi(s) \coloneqq \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\theta(s) - \theta(s-\varepsilon)}{\varepsilon}$, maka φ tak turun dan kontinu kiri.

Sebaliknya, misalkan $x, y \in (a, b)$ dan $\alpha \in [0, 1]$. Misalkan pula $z = \alpha x + (1-\alpha)y$, jika (3.1.5) terpenuhi, maka

$$\theta(z) - \alpha\theta(x) - (1-\alpha)\theta(y) = \alpha[\theta(z) - \theta(x)] - (1-\alpha)[\theta(y) - \theta(z)]$$

$$= \alpha \int_x^z \varphi(s)\, ds - (1-\alpha) \int_z^y \varphi(s)\, ds$$

$$\leq \alpha(z-x)\varphi(z)-(1-\alpha)(y-z)\varphi(z)$$

$$=\alpha(1-\alpha)(y-x)\varphi(z)-(1-\alpha)\alpha(y-x)\varphi(z)$$

$$=0.$$

Karena θ monoton, maka θ memiliki turunan hampir dimana-mana pada (a,b). Terbukti.

Perhatikan bahwa fungsi Young $\theta:\overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ merupakan fungsi konvek dan $\theta(0)=0$, tetapi mungkin terdapat *jump* ke ∞ di suatu titik. Misalkan $\theta(a)=\infty$, jelas $\theta(x)=\infty$ untuk $|x|\geq|a|$. Untuk kasus ini, nilai $\varphi(x)=\infty$ untuk $|x|>|a|$ dan definisikan $\varphi(0)=0$.

Akibat 3.1.6

Jika $\theta:\overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ merupakan fungsi Young, maka θ dapat direpresentasikan sebagai

$$\theta(x)=\int_0^{|x|}\varphi(s)\ ds.$$

Dimana $\varphi:\mathbb{R}^+\cup\{0\}\to\overline{\mathbb{R}^+}$, tak turun, dan kontinu kiri.

Remark 2. Fungsi bernilai real diperluas θ dikatakan kontinu kiri di c jika dan hanya jika $\lim_{x\to c^-}\ \theta(x)=\ \theta(c)$.

Bukti Akibat 3.1.6. Retriksikan $\theta:\overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ menjadi $\vartheta:\overline{\mathbb{R}^+}\to\mathbb{R}$ dimana $\vartheta(x)=\theta(x)$. Misalkan $\vartheta(x)\in\mathbb{R}$ untuk $x\leq a$ dan $\vartheta(x)=\infty$ untuk $x>a$ (atau $x<a$ dan $\vartheta(x)=\infty$ untuk $x\geq a$). Berdasarkan teorema 1, untuk $c=0$

$$\vartheta(x) = \int_0^x \varphi(s)\ ds, \quad 0 \le x < a. \tag{3.1.7}$$

Definisikan $\varphi(s) := \infty$ untuk $s > a$ dan $\vartheta(a) \coloneqq \lim_{x\to a} \vartheta(x)$, sehingga persamaan (3.1.7) berlaku untuk semua $x \ge 0$. Karena θ fungsi genap, maka $\theta(x) = \theta(|x|) = \vartheta(|x|) = \int_0^{|x|} \varphi(s)\ ds$. Terbukti.

Karena $\theta(0) = 0$ dan $\lim_{x\to\infty} \theta(x) = \infty$ maka θ bukan fungsi konstan. Sehingga φ bukan merupakan fungsi konstan 0 atau ∞. Oleh sebab itu Akibat 3.1.6 dapat dimodifikasi kedalam pernyataan yang lebih kuat, dan disajikan pada akibat berikut

Akibat 3.1.8

Fungsi $\theta: \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ merupakan fungsi Young jika dan hanya jika θ dapat direpresentasikan sebagai

$$\theta(x) = \int_0^{|x|} \varphi(s)\ ds,$$

dengan $\varphi: \mathbb{R} \cup \{0\} \to \overline{\mathbb{R}^+}$, tak turun, kontinu kiri, dan bukan merupakan fungsi konstan 0 atau ∞.

Berdasarkan definisi integral tak wajar, $\theta(\infty) = \lim_{x\to\infty} \theta(x)$. Karena φ bukan fungsi konstan 0, maka terdapat $s_0 > 0$ sehingga $\vartheta(s_0) > 0$. Karena φ tak turun, diperoleh

$$\theta(\infty) = \lim_{x\to\infty} \theta(x) = \lim_{x\to\infty} \int_0^{|x|} \varphi(s)\ ds \ge \lim_{x\to\infty} \int_{s_0}^{|x|} \varphi(s_0)\ ds = \infty.$$

Selanjutnya akan diperkenalkan komplemen Young yang berbeda dari definisi komplemen Young sebelumnya, dan pada pembahasan-pembahasan berikutnya akan digunakan komplemen Young yang akan dibahas berikut ini.

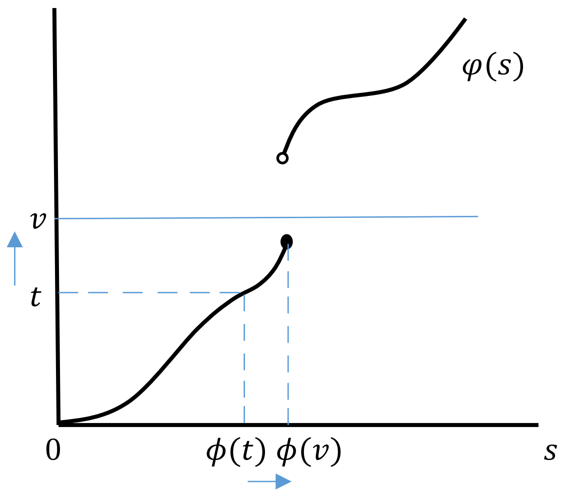
Definisikan perluasan fungsi invers $\phi: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \overline{\mathbb{R}^+}$, dimana

$$\phi(t) \coloneqq \inf_{\varphi(x) \geq t} x, \tag{3.1.9}$$

maka $\phi(t) = 0$ dan tak konstan. Karena $\{x|\varphi(x) \geq t\} \subseteq \{x|\varphi(x) \geq u\}$ untuk $t \geq u$, berdasarkan sifat infimum $\phi(t) = \inf_{\varphi(x)>t} x \geq \inf_{\varphi(x)>u} x = \phi(u)$. Sehingga ϕ tak turun.

Ketika $t \to v^-$, berdasarkan ilustrasi gambar 3.1.10, $\phi(t) \to \phi(v)$. Sehingga ϕ kontinu kiri. Karenanya $\{t|\varphi(t) > u\}$ adalah interval buka $(\phi(u), \infty]$. Berdasarkan (4.10) juga diperoleh

- Jika $\varphi(t) > u$ maka $t > \phi(u)$
- Jika $t > \phi(u)$ maka $\varphi(t) \geq u$
- Jika $t < \phi(u)$ maka $\varphi(t) < u$.



Gambar 3.1.10

Definisikan

$$\psi(y) := \int_{0}^{|y|} \phi(t)\, dt \tag{3.1.11}$$

Berdasarkan Akibat 3.1.8, ψ merupakan fungsi Young.

Proposisi 3.1.12

Misalkan θ fungsi Young dan ψ didefinisikan oleh (4.11). Maka

$$|xy| \leq \theta(x) + \psi(y), \tag{3.1.13}$$

dan kesamaan berlaku ketika $y = \varphi(|x|)$ atau $x = \phi(|y|)$.

Bukti. Cukup dibuktikan untuk kasus $x \geq 0$ dan $y \geq 0$. Jika $\theta(x) = \infty$ atau $\psi(y) = \infty$, ketaksamaan (3.1.13) terbukti. Jika $\theta(x) < \infty$ dan $\psi(y) < \infty$, maka

$$0 \leq xy = \int_{0}^{x} \int_{0}^{y} du\, dv$$

$$= \iint_{\{u\leq x, v\leq y | 0\leq v\leq \varphi(u)\}} du\, dv + \iint_{\{u\leq x, v\leq y | 0\leq \varphi(u)\leq v\}} du\, dv$$

$$= \iint_{\{u\leq x, v\leq y | 0\leq v\leq \varphi(u)\}} du\, dv + \iint_{\{u\leq x, v\leq y | 0\leq \phi(v)\leq u\}} du\, dv$$

$$= \int_{0}^{x} \int_{0}^{\min(y,\varphi(u))} dv\, du + \int_{0}^{y} \int_{0}^{\min(x,\phi(v))} du\, dv$$

$$\leq \int_{0}^{x} \varphi(u)\ du + \int_{0}^{y} \phi(v) dv$$

$$= \theta(x) + \psi(y).$$

Jika y diberikan, maka kesamaan pada langkah kedua terakhir terjadi jika dan hanya jika $y \geq \varphi(u)$ untuk $0 \leq u \leq x$, sehingga $x = \psi(y)$. Jika x diberikan, maka kesamaan terjadi ketika $x \geq \phi(v)$, sehingga $y = \varphi(x)$. Terbukti.

Pada pembahasan-pembahasan selanjutnya notasi ψ akan diganti dengan notasi θ^* dan berdasarkan ilustrasi 3.1.10, $\theta^{**} = \theta$.